Calcul simple et précis des distances terretres courtes à partir des coordonnées géographiques.

INTRODUCTION.

L'incertitude sur les distances calculées à partir des coordonnées géographiques dépend, non seulement de la précision des coordonnées géographiques, mais aussi de celle des formules utilisées pour effectuer les calculs.

Tous les calculateurs de distance trouvés sur Internet supposent que la terre est une sphère ce qui induit une incertitude de +/- 0,5% sur les distances. Les sites qui proposent des formules pour calculer les distances se contentent, eux aussi, de proposer l'approximation sphérique. Très peu de ces sites ne préviennent les utilisateurs de l'imprécision des résultats qu'ils fournissent.

De ce fait, peu d'utilisateurs sont conscients de cette erreur relativement importante et beaucoup, attribuent aux coordonnées, les erreurs qui proviennent des calculs. Ce fait explique la disparité des valeurs trouvées sur Internet concernant la précision des distances calculées à partir des coordonnées fournies par Google Earth.

Cette étude propose des formules simples permettant de calculer des distances courtes avec une bien meilleure précision et une méthode permettant d'obtenir la valeur exacte pour toutes les distances.

Elle évalue la précision des coordonnées fournie par Google Earth en les comparant aux coordonnées de points géodésiques de l'IGN.

Elle évalue enfin l'incertitude sur les distances calculées à partir des coordonnées fournies par Google Earth.

Les coordonnées choisies pour cette étude se trouvant en France, l'évaluation de la précision de Google Earth n'est donc valable que pour la France métropolitaine, elle laisse donc au lecteur qui souhaiterait les utiliser pour d'autres lieux, la charge de vérifier leur validité.

CONCLUSIONS.

En utilisant l'approximation de la latitude moyenne présentée au paragraphe 1.3, l'incertitude sur les distances calculées à partir des coordonnées fournies par Google Earth peut s'évaluer comme suit :

Dans les zones pour lesquelles l'option 3D est disponible l'incertitude est de :

- <+/- 0,12% pour les distances inférieures à 2,5 km.
- <+/- 3 m pour les distance comprises entre 2,5 km et 200 km.
- <+/- (3 m + 0,005%) pour les distance comprises entre 200 et 1600 km.
- <+/- (3 m + 0,05% **) pour les distance supérieures à 1600 km.

En dehors de ces zones, l'incertitude de 3 m doit être remplacée par 10 m et la distance de transition de 2,5 km doit être remplacée par 8 km.

** N.B : L'incertitude de 0,05% n'est valable que pour les trajets dont les deux extrémités se situent dans le même hémisphère, dans le cas contraire l'incertitude peut atteindre 0,45%.

L'utilisation des formules exactes données au paragraphe 1.4 réduit à néant l'incertitude sur le calcul des distances. L'imprécision des distances ne dépend plus alors que de l'imprécision des coordonnées. Elle est donc de +/- 3m pour toutes les distances dont les deux extrémités se trouvent dans une zone 3D.

DECRIPTION DE LA DĖMARCHE.

1) Calcul des distances à partir des coordonnées géographiques.

1.1) Ellipsoïde de référence.

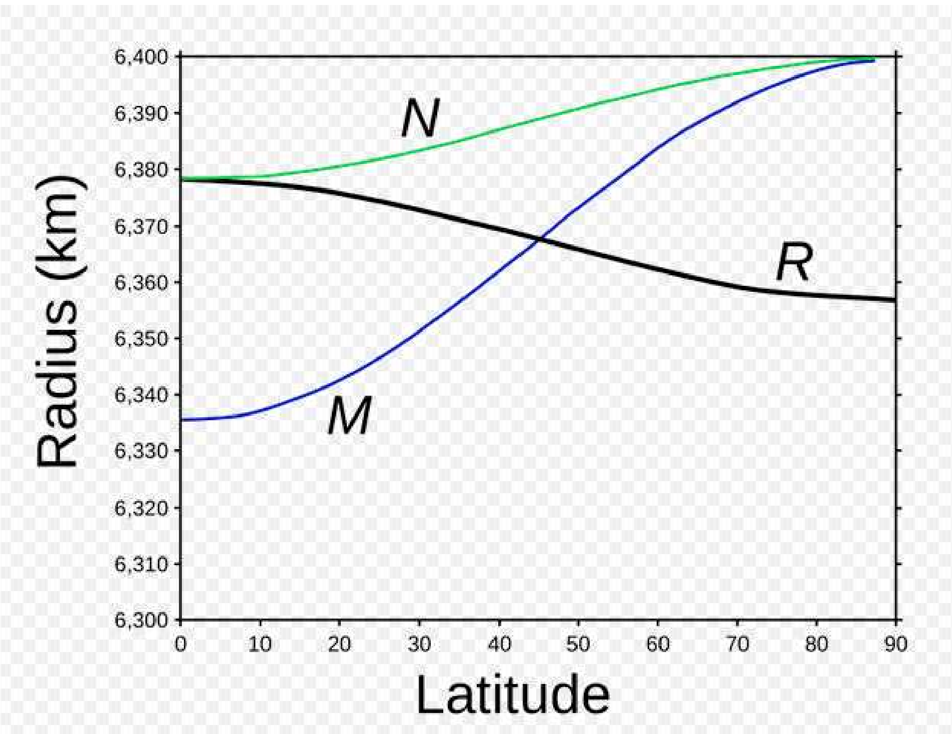
Les coordonnées géographiques d'un point sont définies comme l'intersection entre la verticale passant par ce point et un ellipsoïde de révolution autour de l'axe Nord Sud.

Les dimensions de cette Ellipsoïde sont les suivantes :

Rayon de l'équateur :	Rp0 = 6378,1370 km
Distance du centre aux pôles :	Rcp = 6356,752314 km

Pour pouvoir calculer des distances à partir des coordonnées géographiques, il est nécessaire de connaître la courbure en tout point de l'Ellipsoïde dans le sens Nord Sud et dans le sens est Ouest.

La variation des rayons de courbure de l'Ellipsoïde est présentée sur la graphique ci dessous :



La courbe M représente la variation du rayon de courbure du méridien en fonction de la latitude. Elle a la forme d'une sinusoïde dont les valeurs extrêmes peuvent être calculées en utilisant les formules suivantes :

à l’équateur :

$$Rm0 = \frac{Rcp^2}{Rp0} = 6335{,}4393\ km$$

aux pôles :

$$R90 = \frac{Rp0^2}{Rcp} = 6399{,}5936\ km$$

La courbe N représente la variation du rayon de courbure de l’Ellipsoïde dans la direction est Ouest en fonction de la latitude. Elle a la forme d’une sinusoïde dont les valeurs extrêmes sont Rp0 et R90.

En un point donné la courbure maximale se trouve dans la direction Nord Sud et la courbure minimale dans la direction Est Ouest. Ces deux orientations sont donc les directions principales et la courbure pour les autres directions peut être calculée à partir de ces deux valeurs. Cette propriété géométrique justifie la formule [F6] présentée au paragraphe 1.3 de ce document.

1.2) Approximation sphérique.

La formule la plus simple pour calculer les distances à partir des coordonnées est de supposer que la terre est une sphère de rayon moyen Rm. La distance entre un point A1 de coordonnées Lat1 et Lon1 et un point A2 le coordonnées Lat2 et Lon2 peut alors se calculer avec la formule suivante :

$$D = Rm \times ArcCos\begin{pmatrix}(Sin(Lat1) \times Sin(Lat2) \\ + Cos(Lat1) \times Cos(Lat2) \times Cos(Lon2 - Lon1)\end{pmatrix} \quad \text{[F1]}$$

La plupart des d’utilisateurs de cette formule utilisent le rayon moyen volumétrique de 6371 km mais, si l’on souhaite que l’incertitude soit symétrique, il vaut mieux utiliser le rayon méridien médian qui est à (Rm0 + R90)/2 = 6368 km.

L’incertitude relative associée à cette approximation est alors de +/- 0,5%.

1.3) Approximation de la latitude moyenne.

Le principe de cette approximation est d’utiliser la formule de l’approximation sphérique en utilisant, à la place de la courbure moyenne Rm, la courbure de l’ellipsoïde au milieu du trajet. Cette courbure dépend, non seulement de la latitude, mais aussi de l’orientation du trajet. Cette synthèse donne une excellente précision pour les petites distances. Elle donne aussi une très bonne précision pour les trajets proches du 45$^{\text{ème}}$ parallèle car, dans ce cas, la courbure moyenne le long du trajet est très proche de la courbure au milieu du trajet. Pour les longs trajets dont les deux extrémités se trouvent dans le même hémisphère, elle donne des résultats moins bons, mais qui restent bien meilleurs que l’approximation sphérique car, la courbure au milieu, reste comprise entre les courbures des deux extrémités. Pour les longs trajets, à cheval sur l’équateur, la courbure au milieu peut être plus petite que celle des deux extrémités et l’approximation n’est pas meilleure que l’approximation sphérique.

Cette approximation se calcule comme suit :
On calcule la latitude moyenne :

$$Lat = (Lat1 + Lat2)/2 \qquad \text{[F2]}$$

et l'angle U du trajet avec l'axe Est Ouest en utilisant la formule suivante :

$$U = ArcSin\left(\frac{Lat2 - Lat1}{\sqrt{(Lat2 - Lat1)^2 + (Lon2 - Lon1)^2 \times Cos^2\,(Lat)}}\right) \qquad \text{[F3]}$$

La courbe M présentée plus haut permet de calculer le rayon de courbure Rm du méridien en fonction de la latitude avec la formule suivante :

$$Rm\,(Lat) = Rm0 + (R90 - Rm0) \times \left(1 - Cos^2\,(Lat)\right) \qquad \text{[F4]}$$

De même, le rayon de courbure Rp dans la direction Est-Ouest peut être calculé avec la formule suivante :

$$Rp\,(Lat) = Rp0 + (R90 - Rp0) \times \left(1 - Cos^2\,(Lat)\right) \qquad \text{[F5]}$$

On peut alors calculer le rayon de courbure Ru pour la direction U en utilisant la formule suivante :

$$Ru = \frac{1}{1/Rp(Lat) + (1/Rm(Lat) - 1/Rp(Lat)) \times Sin^2(U)} \qquad \text{[F6]}$$

En introduisant cette valeur dans la formule [F1] à la place de Rm on peut alors calculer la distance D entre les deux points A1 et A2.

L'erreur relative induite par cette approximation peut être calculée avec la formule suivante :

$$Err = \frac{R90 - Rm0}{R90 + Rm0} \times \left(Cos(Lat1 + Lat2) - \frac{Sin\,(2\,Lat2) - Sin\,(2\,Lat1)}{2\,(Lat2 - Lat1)} \right) \qquad \text{[F7]}$$

La précision associée à cette approximation en fonction de la longueur D du trajet peut se résumer comme suit :

Pour D < 200 km, l'incertitude absolue est inférieure à +/- 0,3 m.

Cette valeur correspondant à la résolution des coordonnées de Google Earth les erreurs de calcul de la distance peuvent être négligées.

Pour 200 km < D < 1600 km, l'incertitude relative est inférieure à +/- 0,005%.

Pour D > 1600 km l'incertitude relative est inférieure à +/- 0,05% si les deux extrémités du trajet se trouvent dans le même hémisphère. Dans le cas contraire l'incertitude est de
+/- 0,45%.

Comme attendu, l'erreur est faible pour les petites distances, mais elle aussi est très faible pour les trajets proches de la latitude de 45°.

Par exemple, pour tous les trajets mesurés en France Métropolitaine, L'incertitude sur les distances calculées est inférieure à +/- 0,0001% ce qui correspond à une incertitude absolue inférieure à +/-1 m pour les trajets les plus longs.

Si l'on utilise les coordonnées fournies par le Géoportail de L'IGN dont la précision est de +/- 0,5m on peut ainsi calculer des distances en France avec une incertitude absolue de +/- 2m ce qui permet éventuellement d'éviter le calcul plus complexe de la distance exacte.

1.4) Calcul de la distance exacte.

Il est possible d'améliorer la précision des distances calculées en divisant le trajet en n segments d'égales longueurs. Pour ce faire, on peut utiliser les formules de l'analyse vectorielle.

On utilise un système de coordonnées cartésiennes dont le centre est le centre de l'Ellipsoïde. L'axe x part du centre pour aboutir au point de latitude et longitude nulles. L'axe y part du centre et passe par le point de coordonnées Lat=0 et Lon=90°. L'axe Z part du centre et passe par le pôle Nord.

Pour chacune des deux extrémités du trajet A1 et A2, on calcule les composantes des vecteurs V1 et V2 avec les formules suivantes :

$$Vx = Cos(Lat) \times Sin(Lon) \quad \text{[F8]}$$
$$Vy = Cos(Lat) \times Cos(Lon) \quad \text{[F9]}$$
$$Vz = Sin(Lat) \quad \text{[F10]}$$

On calcule ensuite l'angle α sous lequel le trajet est vu du centre de l'Ellipsoïde avec les formules suivantes :

Si le produit scalaire V1.V2 est positif l'angle se calcule avec la formule :

$$\alpha = ArcSin(Mod(V1 \wedge V2)) \quad \text{[F11]}$$

Si le produit scalaire V1.V2 est négatif l'angle se calcule avec la formule :

$$\alpha = \pi - ArcSin(Mod(V1 \wedge V2)) \quad \text{[F12]}$$

On calcule ensuite les coordonnées des points intermédiaires le long du trajet avec les formules suivantes :

L'angle du point intermédiaire d'ordre i avec le vecteur V1 est :

$$\alpha i = \alpha \times \frac{i}{n} \quad \text{[F13]}$$

On peut calculer les composantes du vecteur correspondant avec la formule :

$$Vi = \frac{Sin(\alpha - \alpha i)}{Sin(\alpha)} \times V1 + \frac{Sin(\alpha i)}{Sin(\alpha)} \times V2 \quad \text{[F14]}$$

Les coordonnées des point intermédiaires sont alors calculées avec les formules :

$$Lat\, i = ArcSin(Viz) \quad \text{[F15]}$$

$$Lon\, i = ArcTg\left(\frac{Vix}{Viy}\right) \quad \text{[F16]}$$

On peut alors déterminer la longueur de chacun des segments en utilisant les formules [F1] à [F7] et calculer la longueur du trajet en additionnant la longueur de tous les segments.

L'incertitude maximale se calcule facilement à partir de la résolution de Rp0 qui est le paramètre le moins précis. Son carré étant utilisé pour calculer R90, l'incertitude maximale se calcule comme suit : +/- 2 x 0,05 / 6378137 = +/- 1,6 ppb, ce qui correspond à une incertitude de 3,2 cm pour le trajet maximal de 20000 km.

Un nombre de segments au moins égal à 360 est nécessaire pour que les erreurs de calcul ne viennent pas dégrader cette précision extrême.

Ce calcul, programmé sans problème sur une page Excel, donne des résultats cohérents.

3) Evaluation de l'incertitude sur les données de Google Earth.

3.1) Evaluation de l'incertitude sur les coordonnées fournies par Google Earth.

La quasi totalité des points géodésiques visibles sur Google Earth se situe en hauteur. Les coordonnées fournies par Google Earth étant prises au niveau du sol, la correction de la perspective est donc nécessaire.

Dans certaines zones, Google Earth offre la possibilité d'abaisser le point de vue au niveau du sol pour voir les surfaces verticales. Cette possibilité, appelée option 3D dans ce document, corrige la perspective et permet d'obtenir des coordonnées fiables de points en hauteur. En dehors de ces zones, l'utilisateur doit corriger lui-même la perspective ce qui augmente les erreurs.

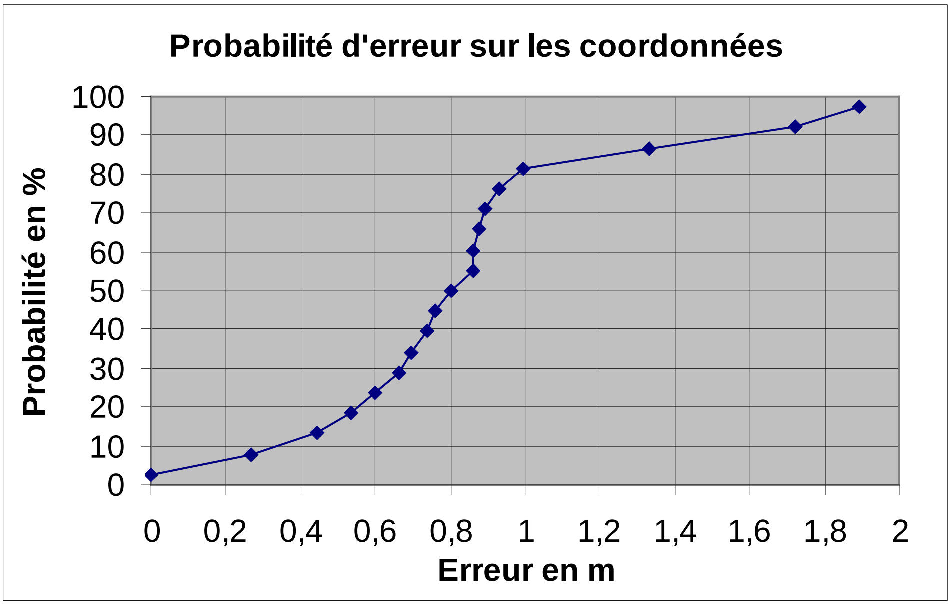
Les coordonnées fournies par Google Earth Pro ont été comparées à celle des fiches géodésiques de l'IGN dont l'incertitude nominale est de +/- 0,1 m.

Dans les zones où l'option 3D est disponible les coordonnées peuvent être relevées de manière fiable avec la précision du centième de seconde soit avec une incertitude de +/-0,15m.

Les deux parties du tableau d'analyse sont présentées en annexe 1 pages 9 et 10.

Pour les zones 3D, les valeurs donnent une erreur maximale de 2m sur les 20 points analysés.

La distribution des erreurs est présentée dans le tableau ci dessous :



Ce graphique met en évidence une distribution à +/- 1m avec quelques valeurs extrêmes qui donnent une incertitude de +/- 2 m. La cause probable de ces valeurs extrêmes est l'imperfection de la correction de la perspective par l'outil 3D.

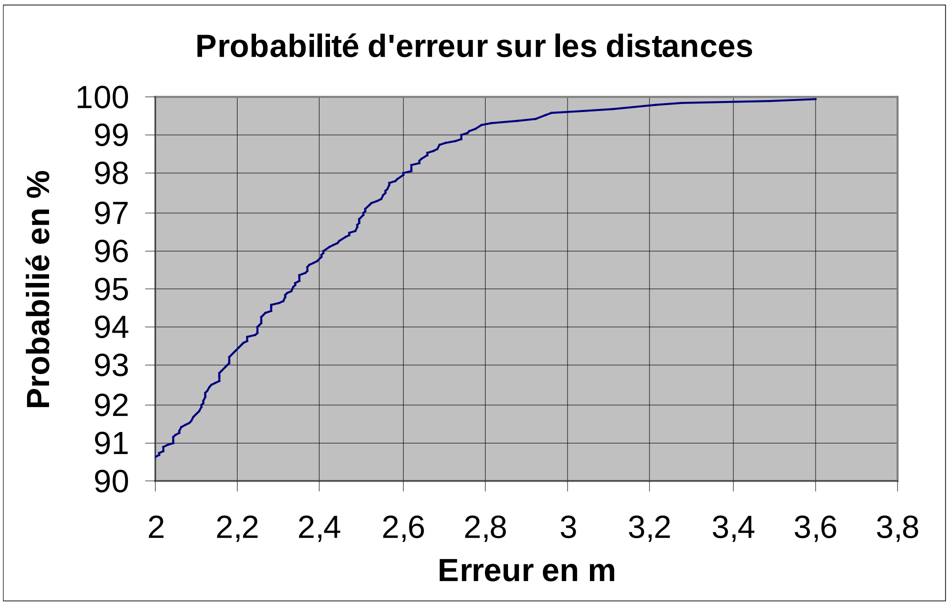
En dehors des zones 3D , l'incertitude est plus importante car il est nécessaire de corriger l'obliquité du point de vue pour prendre une référence au niveau du sol. L'erreur à pu être évaluée pour seulement 4 des les 50 points analysés. La valeur maximale obtenue est de 5,3m.

3.2) Estimation des incertitudes relatives sur les distances.

La première cause de l'incertitude est liée à l'imprécision des coordonnées.

Pour estimer l'incertitude pour les zones 3D, le doublement de l'incertitude sur les coordonnées n'est pas réaliste car, compte tenu de la distribution des erreurs, la probabilité que deux valeurs extrêmes s'ajoutent est très faible. Pour trouver une valeur plus exacte, la probabilité d'erreur a été calculée en utilisant toutes les combinaisons possible des erreurs et en tenant compte de leur orientation relative.

Le tableau page suivante donne la probabilité d'erreur en fonction de la distance :



Il montre qu'une erreur de +/- 3 m a seulement 0,4% de chance d'être dépassée. Cette valeur a donc été choisie comme incertitude.

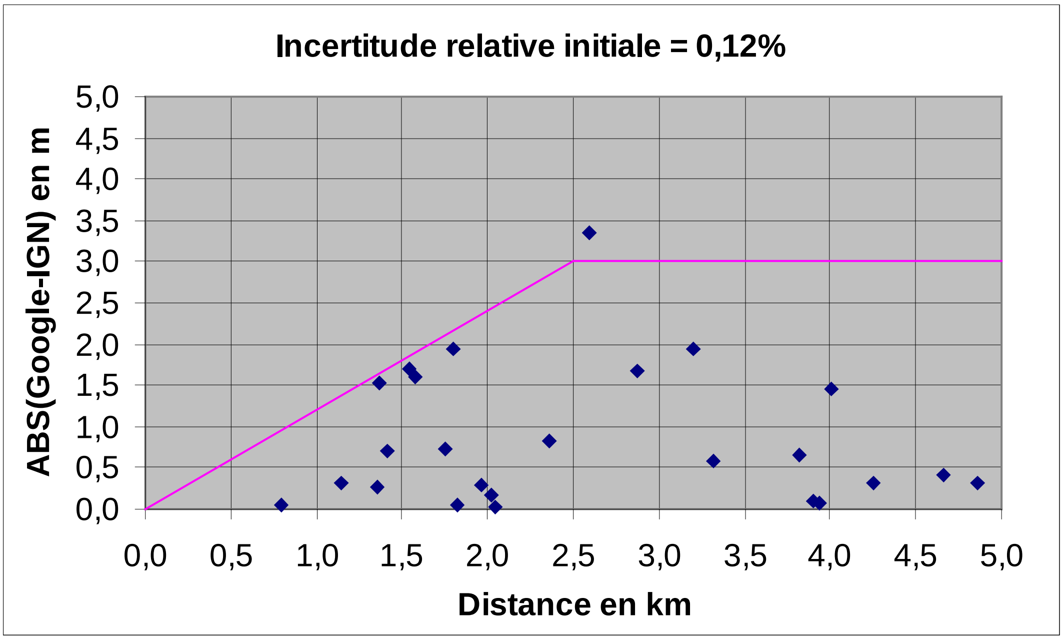
En dehors des zones 3D on double l'incertitude sur les distances ce qui donne +/- 10 m.

<u>4) Evaluation de l'incertitude relative pour les courtes distances.</u>

Pour des très courtes distance l'incertitude absolue, liée à l'incertitude sur les distances, se transforme en incertitude relative.

Pour évaluer cette incertitude relative, les distances des 171 combinaisons des 19 points géodésiques présentés en annexe 1 ont été calculées avec les coordonnées de l'IGN et celles données par Google Earth.

Les valeurs absolues des différences entre ces deux distances, pour des trajets inférieurs à 5 km, sont présentées dans le graphique page suivante :



Ce graphique permet d’évaluer l’incertitude relative initiale à +/- 0,12%.

Pour garder la continuité de l’incertitude on calcule alors la valeur de la distance de transition Dt soit 3 / 0,12 x 100 = 2,5 km pour les mesures effectuées dans les zones 3D.

En dehors des zones 3D on conservera la pente de 0,12% ce qui donnera une distance de transition sera de 10 / 0,12 x 100 = 8,3 km arrondi a 8 km.

<u>ANNEXE 1.</u>

Coordonnées des points géodésiques.

		IGN	IGN	Google	Google
Ref IGN	Repère	Latitude N	Longitude E	Latitude N	Longitude E
74076B	Eglise Villejuif	48°47'31,9625"	2°21'48,7138"	48 °47'31,98"	2°21'48,74"
9404101	Immeuble Ivry	48°48'15,1143"	2°22'49,7452"	48°4 8'15,13"	2°22'49,77"
9102702	Chât.d'eau Athis-Mons	48°41'55,9395"	2°22'20,2 219"	48°41'55,95"	2°22'20,25"
91326A	Eglise Juvisy	48°41'31,6514"	2°22'33,5933"	48°41 '31,66"	2°22'33,62"
91589A	Eglise Savigny	48°41'16,3278"	2°21'00,0927"	48°4 1'16,32"	2°21'00,14"
77053A	Eglise BrieComteRobert	48°41'25,3203"	2°36'31,0 657"	48°41'25,31"	2°36'31,08"
91339A	Chât.d'eau Montlhéry	48°37'32,1948"	2°15'02,344 6"	48°37'32,22"	2°15'02,37"
91570A	Eglise St Michel/Orge	48°37'54,7164"	2°18'12,14 75"	48°37'54,74"	2°18'12,17"
91458A	Eglise Nozay	48°39'37,0431"	2°14'33,5361"	48°39' 37,07"	2°14'33,55"
9113502	Borne Champcueil	48°30'43,6515"	2°25'18,9905"	4 8°30'43,66"	2°25'18,99"
9115902	Chât.d'eau Chevannes	48°31'56,4705"	2°26'18,74 24"	48°31'56,47"	2°26'18,74"
75056E	Dôme Sacré Cœur	48°53'12,0220"	2°20'34,9200"	48° 53'12,08"	2°20'34,95"
75056AH	Egl. St Michel des Bat.	48°53'20,1004"	2°19'29 ,5481"	48°53'20,12"	2°19'29,58"
75056BB	Eglise St Eustache	48°51'48,2906"	2°20'42,4149 "	48°51'48,24"	2°20'42,45"
75056AL	Eglise St Sulpice	48°51'04,0904"	2°20'03,0166"	48°51'04,10"	2°20'03,05"
75056AR	Eglise St Paul St Louis	48°51'16,3034"	2°21'40 ,9655"	48°51'16,34"	2°21'41,00"
9157001	Chât.d'eau StMichel/orge	48°38'23,4557"	2°18'4 7,6050"	48°38'23,47"	2°18'47,62"
91549B	Eglise Ste Geneviève…	48°38'02,0570"	2°20'06,9978"	48°38'02,08"	2°20'06,98"
7739201	Eglise Rouvres	49°03'43,9609"	2°43'02,1748"	49° 03'43,96"	2°43'02,08"
6015802	Eglise Coyvrel	49°33'11,5494"	2°33'22,1327"	49° 33'11,44"	2°33'22,09"
91045A	Eglise Ballancourt	48°31'31,046"	2°23'09,529"		
9152501	Pylone électrique	48°30'47,4414"	2°02'53,5207"	48°30'47,27"	2°02'53,55"

La première colonne donne la référence de la fiche géodésique.

ANNEXE 2

Ecarts en mètres entre les points Géodésiques et ceux désignés par les coordonnées fournies par Google Earth Pro.

		D Lat	D Lon	Ecart
Ref IGN	Repère	m	m	m
74076B	Eglise Villejuif	0,5	0,5	0,8
9404101	Immeuble Ivry	0,5	0,5	0,7
9102702	Chât.d'eau Athis-Mons	0,3	0,6	0,7
91326A	Eglise Juvisy	0,3	0,5	0,6
91589A	Eglise Savigny	-0,2	1,0	1,0
77053A	Eglise BrieComteRobert	-0,3	0,3	0,4
91339A	Chât.d'eau Montlhéry	0,8	0,5	0,9
91570A	Eglise St Michel/Orge	0,7	0,5	0,9
91458A	Eglise Nozay	0,8	0,3	0,9
9113502	Borne Champcueil	0,3	0,0	0,3
9115902	Chât.d'eau Chevannes	0,0	0,0	0,0
75056E	Dôme Sacré Cœur	1,8	0,6	1,9
75056AH	Egl. St Michel des Bat.	0,6	0,6	0,9
75056BB	Eglise St Eustache	-1,6	0,7	1,7
75056AL	Eglise St Sulpice	0,3	0,7	0,7
75056AR	Eglise St Paul St Louis	1,1	0,7	1,3
9157001	Chât.d'eau StMichel/orge	0,4	0,3	0,5
91549B	Eglise Ste Geneviève…	0,7	-0,4	0,8
7739201	Eglise Rouvres	0,0	-1,9	1,9
6015802	Eglise Coyvrel	-3,4	-0,9	3,5
91045A	Eglise Ballancourt	-4,2	1,5	4,5
9152501	Pylone électrique	-5,3	0,6	5,3

Ce tableau montre que les distances sont inférieures à 2m dans les zones 3D et peuvent atteindre voire dépasser 5m en dehors de ces zones.

Les 4 derniers points sont situés en dehors des zones 3D. Ils représentent les valeurs mesurables les plus grandes sur un échantillon de 30 points géodésiques.

Pour l'église de Ballancourt les distances ont été mesurées en utilisant un logiciel ce Conception Assistée par Ordinateur sur l'image numérisée.