CONJECTURE DE SYRACUSE

Les suites de Syracuse se calcule de la manière suivante :
Pour un nombre entier positif de départ choisi, on a 2 cas possibles :
Si l'entier est impair, on le multiplie par 3 et on lui rajoute 1, pour le rendre pair.
Si l'entier est pair, on le divise par 2 autant de fois que possible jusqu'à le rendre impair.

Exemple de suite avec 17 comme nombre de départ → 17,52,26,13,40,20,10,5,16,8,4,2,1

La conjecture de Syracuse s'énonce ainsi : Quel que soit l'entier positif de départ choisi dans $\mathbb{N}$, la suite de Syracuse ainsi calculée finie toujours par converger vers 1.

Cet article permet de comprendre pourquoi la conjecture de Syracuse est toujours vrai.
Dans une première partie, on s'attachera au : « **Quel que soit l'entier positif de départ choisi dans $\mathbb{N}$ …** » de la conjecture et dans une deuxième partie nous verrons pourquoi « **la convergence vers 1 est inévitable ».**

Partie 1

Reprenons la suite de Syracuse commençant par 17 :

17,52,26,13,40,20,10,5,16,8,4,2,1

Et inversons là :

1,2,4,8,16,5,10,20,40,13,26,52,17

Ce que l'on remarque tout de suite, c'est que le segment du début de cette suite 1,2,4,8,16 est de la forme $\mathbf{1.2^n}$.

Et en y regardant encore de plus près, on peut voir aussi, que le segment 5,10,20,40 est de la forme $\mathbf{5.\ 2^n}$, que le segment 13,26,52 est de la forme $\mathbf{13.\ 2^n}$ et enfin que 17 est de la forme $\mathbf{17.\ 2^n}$
(Avec prenant des valeurs différentes pour chaque segment)

Est-ce un hasard ?

Essayons avec une autre suite, par exemple la suite commençant par 53 et inversons-la :

1,2,4,8,16,5,10,20,40,80,160,53

A nouveau, cette suite se compose des segments suivants :

1,2,4,8,16=$\mathbf{1.2^n}$
5,10,20,40,80,160=$\mathbf{5.2^n}$
53=$\mathbf{53.2^n}$

Prenons en une autre un peu plus longue, par exemple la suite commençant par 325 :

1,2,4,8,16,5,10,20,40,80,160,53,106,35,70,23,46,92,184,61,122,244,488,976,325

Même constat, on a les segments suivants :

$$1,2,4,8,16=\mathbf{1.2^n}$$
$$5,10,20,40,80,160=\mathbf{5.2^n}$$
$$53,106=\mathbf{53.2^n}$$
$$35,70=\mathbf{35.2^n}$$
$$23,46,92,184=\mathbf{23.2^n}$$
$$61,122,244,488,976=\mathbf{61.2^n}$$
$$325=\mathbf{325.2^n}$$

Du fait même du mode calcul des suites de Syracuse,

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair,} \\ 3x+1 & \text{si } x \text{ est impair,} \end{cases}$$

On peut conclure que toutes les suites de Syracuse s'écrivent comme une concaténation de segment de suite géométriques de la forme $\mathbf{y=k.2^n}$ avec **k** impair et **n** entier naturel positif.

Maintenant, si l'on fait varier **k** impair de 1→∞ et n de 0→∞ , on peut construire la matrice suivante :

k/n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	∞
1	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	…
3	3	6	12	24	48	96	192	384	768	1536	3072	6144	12288	24576	49152	…
5	5	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	5120	10240	20480	40960	81920	…
7	7	14	28	56	112	224	448	896	1792	3584	7168	14336	28672	57344	114688	…
9	9	18	36	72	144	288	576	1152	2304	4608	9216	18432	36864	73728	147456	…
11	11	22	44	88	176	352	704	1408	2816	5632	11264	22528	45056	90112	180224	…
13	13	26	52	104	208	416	832	1664	3328	6656	13312	26624	53248	106496	212992	…
15	15	30	60	120	240	480	960	1920	3840	7680	15360	30720	61440	122880	245760	…
17	17	34	68	136	272	544	1088	2176	4352	8704	17408	34816	69632	139264	278528	…
19	19	38	76	152	304	608	1216	2432	4864	9728	19456	38912	77824	155648	311296	…
21	21	42	84	168	336	672	1344	2688	5376	10752	21504	43008	86016	172032	344064	…
23	23	46	92	184	368	736	1472	2944	5888	11776	23552	47104	94208	188416	376832	…
25	25	50	100	200	400	800	1600	3200	6400	12800	25600	51200	102400	204800	409600	…
27	27	54	108	216	432	864	1728	3456	6912	13824	27648	55296	110592	221184	442368	…
29	29	58	116	232	464	928	1856	3712	7424	14848	29696	59392	118784	237568	475136	…
31	31	62	124	248	496	992	1984	3968	7936	15872	31744	63488	126976	253952	507904	…
33	33	66	132	264	528	1056	2112	4224	8448	16896	33792	67584	135168	270336	540672	…
∞																

Lorsque n varie de 0 à l'infini et que k prend des valeurs impaires croissantes à partir de 1 jusqu'à l'infini, voici ce que l'on peut constater :

1. **Cette matrice contient tous les entiers positifs de ℕ**, car tous les entiers positifs peuvent être générés à partir des suites géométriques de la forme $y=k.2^n$.
   Et l'on peut conclure, que tous les entiers qui peuvent être points de départ ou étape pour une suite de Syracuse, sont bien contenus dans cette matrice.

2. **Tous les segments de suites de Syracuse sont contenus dans la matrice** : Les suites de Syracuse, quel que soit le nombre de départ, finissent toujours par traverser des segments de suites géométriques de la forme $y=k\cdot2^n$. Ces segments sont bien tous représentés dans la matrice, ce qui implique que tous les cas possibles sont couverts.

Ces 2 choses permettent de couvrir le « **Quel que soit l'entier positif de départ choisi dans ℕ …** » de la conjecture

---

Partie 2

Pour comprendre l'inévitable **convergence**, reprenons l'exemple de la suite de Syracuse commençant par 17 et visualisons l'apparition des segments sur la matrice.

k/n	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	4	8	16	32	64
3	3	6	12	24	48	96	192
5	5	10	20	40	80	160	320
7	7	14	28	56	112	224	448
9	9	18	36	72	144	288	576
11	11	22	44	88	176	352	704
13	13	26	52	104	208	416	832
15	15	30	60	120	240	480	960
17	17	34	68	136	272	544	1088
19	19	38	76	152	304	608	1216

Les divisions successives par 2 occasionnent un déplacement horizontal de droite à gauche sur une même ligne de la matrice (flèches vertes). Et même, si l'on choisit un nombre pair infini se situant sur une ligne quelconque, nous aurons toujours un retour horizontal sur la première colonne des nombres impairs de la matrice.
Mais pour comprendre la convergence, il faut prioritairement s'intéresser aux différents changements de ligne dans la matrice, qui au final nous ramènent toujours sur sa première ligne. C'est ce que les opérations successives 3k+1 occasionnent précisément (flèches rouges), en transformant un nombre impair en nombre pair.

A ce stade des explications, une autre remarque importante doit être faite. C'est le fait que toutes les valeurs paires de la matrice ne sont pas éligibles au résultat de l'opération 3k+1. Par exemple, 32 sur la ligne k=1, ne peut pas provenir de l'opération 3k+1, car 32-1=31 qui n'est pas divisible par 3. A contrario, 64 oui, car 64-1=63 qui divisé par 3 donne 21.
On peut donc en déduire, qu'il existe dans la matrice 2 types de valeurs paires :

- Celles qui établissent des liaisons avec d'autres lignes
- Et celles qui ne le font pas.

Simplifions la matrice, en passant en revue toute les valeurs paires et en ne retenant que celles qui relient à d'autres lignes, et voici ce que cela donne :

k/n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	∞
1		4		16		64		256		1024		4096		16384	…
3															…
5	10		40		160		640		2560		10240		40960		…
7		28		112		448		1792		7168		28672		114688	…
9															…
11	22		88		352		1408		5632		22528		90112		…
13		52		208		832		3328		13312		53248		212992	…
15															…
17	34		136		544		2176		8704		34816		139264		…
19		76		304		1216		4864		19456		77824		311296	…
21															…
23	46		184		736		2944		11776		47104		188416		…
25		100		400		1600		6400		25600		102400		409600	…
27															…
29	58		232		928		3712		14848		59392		237568		…
31		124		496		1984		7936		31744		126976		507904	…
33															…
35	70		280		1120		4480		17920		71680		286720		…
37		148		592		2368		9472		37888		151552		606208	…
39															…
41	82		328		1312		5248		20992		83968		335872		…
43		172		688		2752		11008		44032		176128		704512	…
45															…
47	94		376		1504		6016		24064		96256		385024		…
49		196		784		3136		12544		50176		200704		802816	…
∞															…

On obtient alors une matrice de liaison. C'est-à-dire une matrice, qui pour n'importe quelles valeurs de k impaire prises dans la colonne 1 (en bleu), nous permet d'atterrir sur une valeur paire appartenant à une autre ligne de la matrice, après application de l'opération 3k+1.

Ceci ne nous explique toujours pas pourquoi les suites de Syracuse se terminent toujours sur la première ligne, mais nous met tout de même sur la voie …

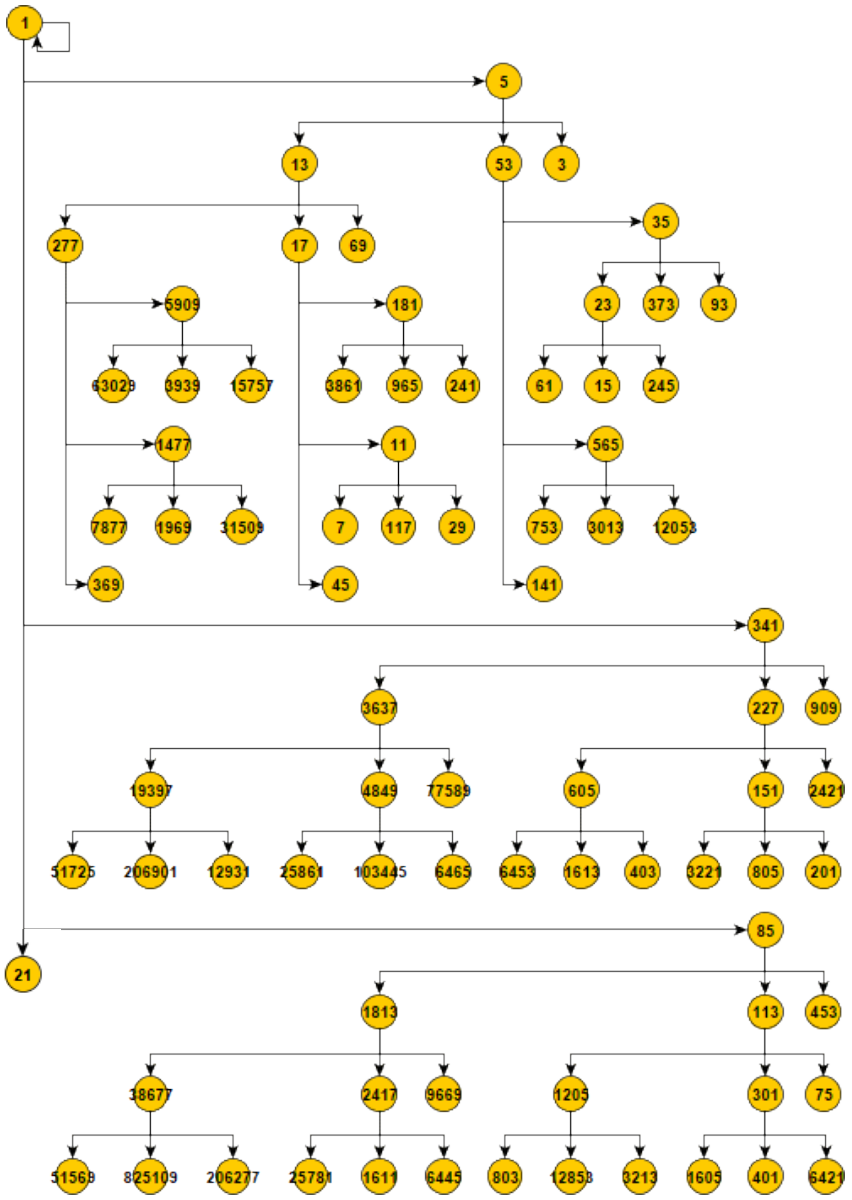
Par soucis de clarté, faisons maintenant apparaitre clairement en lieu et place des valeurs paires de liaisons N, les numéros de ligne concernés, en appliquant l'opération inverse (N-1) /3.

k/n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	∞
1		1		5		21		85		341		1365		5461	…
3															…
5	3		13		53		213		853		3413		13653		…
7		9		37		149		597		2389		9557		38229	…
9															…
11	7		29		117		469		1877		7509		30037		…
13		17		69		277		1109		4437		17749		70997	…
15															…
17	11		45		181		725		2901		11605		46421		…
19		25		101		405		1621		6485		25941		103765	…
21															…
23	15		61		245		981		3925		15701		62805		…
25		33		133		533		2133		8533		34133		136533	…
27															…
29	19		77		309		1237		4949		19797		79189		…
31		41		165		661		2645		10581		42325		169301	…
33															…
35	23		93		373		1493		5973		23893		95573		…
37		49		197		789		3157		12629		50517		202069	…
39															…
41	27		109		437		1749		6997		27989		111957		…
43		57		229		917		3669		14677		58709		234837	…
45															…
47	31		125		501		2005		8021		32085		128341		…
49		65		261		1045		4181		16725		66901		267605	…
∞															…

Cette fois ci, nous pouvons lire directement que par exemple la ligne 1 est en relation avec les lignes 1, 5, 21, etc…. ou que la ligne 29 est en relation avec les lignes 19, 77, 309, etc…

La bizarrerie de ligne 1 en relation avec elle-même, n'est rien d'autre que le reflet du cycle infernal de fin de toutes les suites de Syracuse 4,2,1,4,2,1,4,2 ,1 …

Dès que l'on parle de liaison entre des valeurs, on pense très vite à la notion de graphe, et ce que nous allons construire maintenant à partir de cette dernière matrice.



Pour des raisons de place, cette figure ne représente qu'une petite partie de la matrice.

Comment interpréter ce graphe ?

Une fois de plus, reprenons notre exemple de la suite de Syracuse inversée, commençant par 17 :

1,2,4,8,16,5,10,20,40,13,26,52,17

Eliminons les nombres pairs conservons les nombres impairs qui la compose :

1,5,13,17

Nous retrouvons ce chemin sans problème sur le graphe.

Il en est de même la suite de Syracuse inversée, commençant par 53 : 1,5,53

Et en procédant ainsi, et s'il tenez sur la feuille de papier, nous pourrions retrouver sur ce graphe, toutes les suites de Syracuse possibles et inimaginables que contient la matrice lorsque **k** impair varie de 1→∞ et n varie de 0→ ∞

Ce graphe est le reflet de toutes les étapes **impaires** contenues dans les suites de Syracuse.

Bon ! et la convergence ?
Nous y arrivons, mais pour cela, étudions le graphe.

Son analyse nous donne plusieurs informations :

1. Le graphe possède un nœud de départ qui est 1. De ce nœud partent toutes les liaisons entre les différentes lignes de la matrice. On a donc à faire à un graphe **enraciné en 1**

2. Chaque arête peut être parcourue dans les deux sens :
   - Soit dans le sens 3k+1
   - Soit dans le sens (k-1) / 3

   Exemple : 16 de la ligne 1 -> (16-1) / 3 nous mène à la ligne 5, et de la ligne 5 on peut revenir à la ligne 1 par l'opération -> (5*3) + 1 = 16 appartenant à la ligne 1
   On a donc à faire à un graphe **non orienté**.

3. Tous les nœuds de ce graphe sont reliés entre eux. Il existe un chemin unique entre toute les paires de nœuds. Et Il ne peut pas en être autrement car nous avons vu que toutes les lignes de la matrice (quand k→∞) sont reliées entre elles par l'opération 3k+1. Ceci confère à ce graphe la propriété d'être un graphe **connexe**.

4. Hors mis pour le nœud 1, il n'existe aucun cycle dans ce graphe. Là aussi il ne peut pas en être autrement, car l'opération 3k+1 répétée plusieurs fois ne permet jamais de revenir à sa valeur de départ. L'absence de cycle dans ce graphe lui confère la propriété d'être **acyclique**.

A partir de ces 4 informations, et de la **théorie des graphes**, nous pouvons affirmer rigoureusement que ce type de graphe est un **arbre enraciné**.

Et voilà, nous y sommes …
Ce graphe issu de la matrice, décrivant l'ensemble des suites de Syracuse quand **k** impair varie de 1→∞ et n varie de 0→∞**,** est en fait **un arbre enraciné**, et dans un arbre enraciné, toujours d'après la théorie de graphes, tous les nœuds qu'il contient sont **forcément reliés à sa racine**, par un chemin unique. Et l'ensemble de ces chemins uniques représentent l'ensemble des suites de Syracuse.

La convergence vers 1 est donc inévitable parce que les liaisons entre les différents segments de la forme $y=k.2^n$ qui composent les suites de Syracuse, forment **un arbre enraciné** en 1, CQFD.

EN RESUME :

1. Nous avons vu que toutes les suites de Syracuse s'écrivent comme une **concaténation** de **segment de suite géométriques** de la forme $\mathbf{y=k.2^n}$ avec **k** impair et **n** entier naturel positif.

2. Que l'empilage de l'ensemble de ces suites géométrique quand **k** impair de varie 1→∞ et n varie de 0→∞**,** permet de construire une **matrice** contenant l'ensemble de toutes les suites de Syracuse et les différentes **liaisons** pouvant exister entre elles.

3. Que ces liaisons, mise sous forme de graphe, nous font apparaitre une **structure d'arbre enraciné** ne laissant aucun doute sur la **convergente vers 1** de l'ensembles complet des suites de Syracuse.